

Wenn **ZWEI** eines **SECHS** - tetts gleichzeitig müssen ,
verbleibt ein **zauberhaftes** Quartett !



Kunst **I**st , ALLERL  zu ma Thema tisieren !

Peter Hammer chaosachso21@gmail.com

Felix Huber felix.68@gmx.ch

Rolf Knobel rolf.knobel@bluewin.ch

Armin Widmer widmer.ar@bluewin.ch

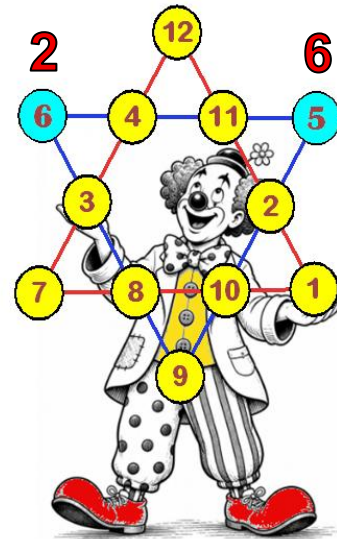
Rätsel des Monats $2 \cdot (6 + 7) + 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 6 = 26$

K og I to – ergo sum

Idee Armin Widmer , Felix Huber , Rolf Knobel , Peter Hammer

Dieser manipulierte Spruch «**K** og **I** to, ergo sum» – anstatt «cogito, ergo sum» – des französischen Philosophen René Decartes in seinem Werk «Meditationes de prima philosophia» (1641) entdeckten wir auf der Karte einer Geburtstags-Einladung (Abbildung).

Im Rampenlicht stand für uns aber weder der Spruch noch das kritische Geburtstagsalter von 65 Jahren. Da bei einem magischen Sechseck – hergestellt durch die Zahlen 1 bis 12 – vor allem die **Zahl 26** als Summe aller sechs Geraden verherrlicht wird, schenkten wir der Geburtstag-Gesellschaft unter anderem ein Rätsel, das direkt beim Fest ohne Hilfsmittel zu lösen war !



Frage Lassen sich analog zum Bild die Zahlen 1 bis 12 so platzieren, dass erneut in allen sechs Geraden die **Summe 26** erscheinen und oben links die **2** anstelle der **6** und oben rechts die **6** anstelle der **5** erscheinen wird.

«Ich stelle am Ende eines Jahre Rätsel rund um die neue Jahreszahl her, um die eine oder der andere gern nachdenken soll», sagt sich Rolf Knobel jeweils beim Jahresende und betont, dass eine Kreation weitaus mehr Freude bereitet als nur das Entdecken einer spitzfindigen Lösung. So kreierte Knobel beispielsweise den Quotienten 2 über PI im Quadrat mit dem pointierten Dezimalbruch **0 . 2026 4237 ... (2 + 0 + 2 + 6 + 4 + 2 + 3 + 7 = 26) !**

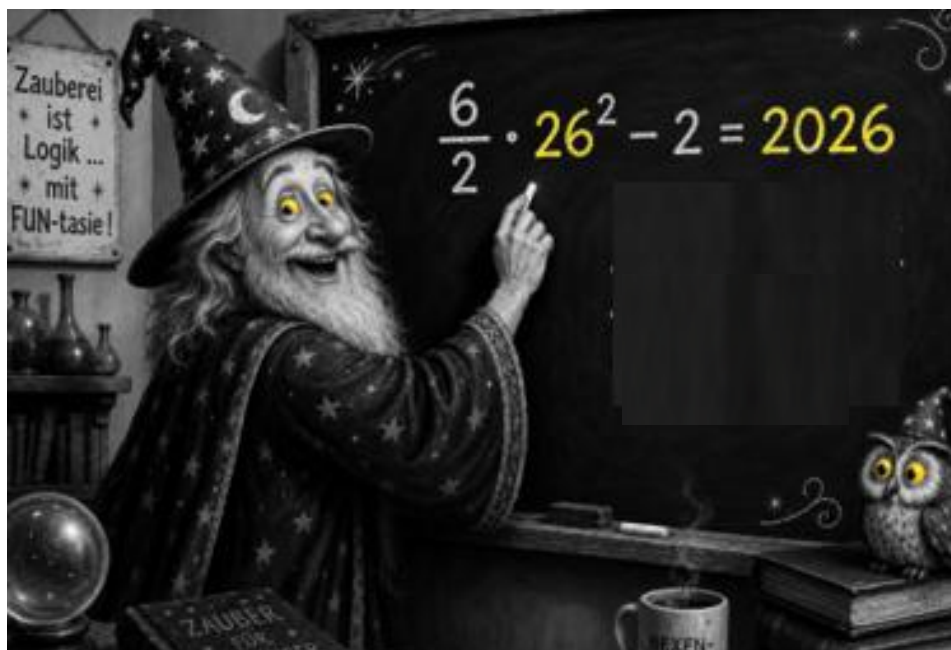
$$\frac{2}{\pi^2}$$

Frage Die Summe der letzten Digitalstelle (Einer) aller Quadratzahlen von 1 bis **n** beträgt **2026**. Um welche natürliche Zahl **n** handelt es sich ?



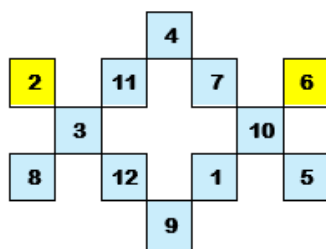
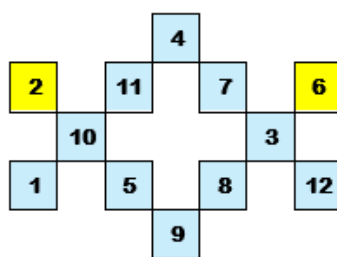
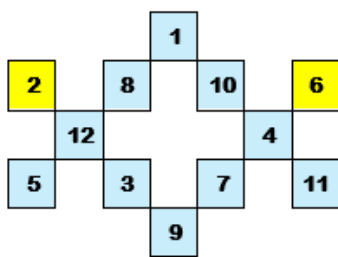
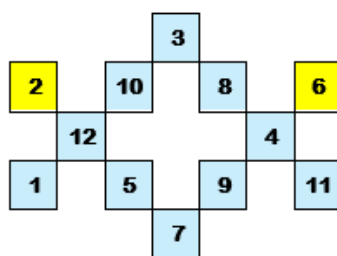
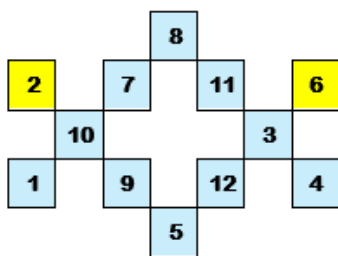
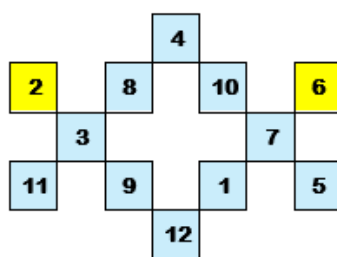
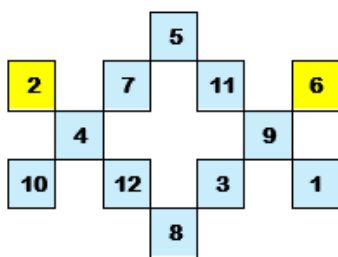
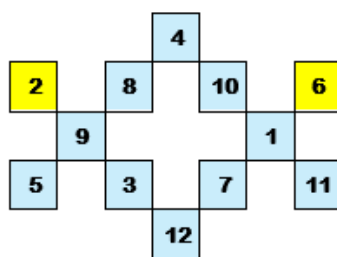
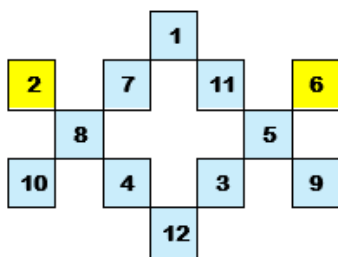
Frage Allein ein Blick auf die Zwei und die Sechs reicht aus, um den Aufbau dieser Kugelpyramide weiterzuentwickeln. Die Folge $2 - 6 - 10 - 14 - 18 - \dots$ breitet sich jeweils links und rechts abfallend symmetrisch aus. In der Abbildung entdecken wir die **Summe 26** in der 3. Reihe. Und in welcher Reihe werden wir die Summe **2026** vorfinden ?

«Auch der Inkreis hat offensichtlich eine Vorliebe für die Zahl **26**», erklärt uns **Felix Huber** lächelnd und stellt uns die Frage: Gibt es rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seiten, bei dem der Inkreisradius «passend» die **Länge 26** aufweist und die zudem sogar primitiv sind. Das heisst, die drei Seiten sind teilerfremd. Und wie stets ist mit dem gross-ART-igen Tüftler und Denker **Armin Widmer** zu rechnen. Er will wissen: Wie gross ist der kleinste Radius, der **26 Lösungen** enthält ?



Lösungen Rätsel des Monats $2 \cdot (6 + 7) + 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 6 = 26$

Die erste dieser neun Varianten lässt sich mit viel Glück und etwas Verstand ohne Hilfsmittel blitzartig finden. Die Summe zwischen den **Zahlen 2** und **6** muss 18 sein. Wir entscheiden uns für die Variante «ungerade» respektive für 7 und 11. Die sich ausgleichenden Extreme (1 und 12) platzieren wir oben und unten. Dadurch sind die Zahlen 5 und 8 aufoktroziert und der Rest ergibt sich.



1 , 4 , 9 , 6 , 5 , 6 , 9 , 4 , 1 , 0 sind die Endziffern der ersten 10 Quadratzahlen. Die Summe beträgt 45. Jeder weiterer Zehner-Block mit Quadratzahlen hat die gleichen Endziffern. Folge dessen wiederholt sich bis zur 451. Quadratzahl 45 mal die Summe 45 gefolgt von der Zahl Eins bei der 451. Quadratzahl.

Somit ist die Lösung **n = 451** mit der Abrechnung $45 \times 45 + 1 = \mathbf{2026}$.



Die Summe einer Reihe setzt sich zusammen aus der doppelten Summe der ungeraden Zahlen 1 bis $2n + 1$ und 1 bis $2n - 1$. Beispielsweise haben wir in der 3. Reihe links mit den Zahlen 2 , 6 und 10 die ungeraden Zahlen 1 , 3 und 5 verdoppelt und rechts mit den Zahlen 6 und 2 die ungeraden Zahlen 3 und 1.

Die Summe von ungeraden Zahlen führen zu Quadratzahlen und somit ergibt sich:

$$2 \cdot \left[n^2 + (n-1)^2 \right] = 4n^2 - 4n + 2$$

$$\text{für } n = 23 \Rightarrow 2 \cdot (23^2 + 22^2) = \mathbf{2026} \quad \text{https://oeis.org/A069894}$$

Armin Widmer: «Gemäss OEIS: A078644 (**26**) gibt es 6 pythagoreische Dreiecke mit einem Inkreisradius der **Länge 26**. Von diesen sechs Dreiecken sind zwei primitiv, das heisst $\text{ggT}(a, b, c) = 1$ (OEIS: A068068). Im OEIS sind nur die Folgeglieder mit $r < 96$ abgelegt. Ich habe den Zahlenraum bis $r = 1'000'000$ erweitert und festgestellt: Der kleinste Radius mit **26 Lösungen** ist $r = 1'458$. Mit $r = 720'720$ gibt es fast **2026** (konkret 2025) Lösungen. Kurioserweise gilt $a(26) = a(2026)$. Weitere Fragen sind verlockend: Gibt es zu jedem Radius mit der Länge 1 bis und mit **2026** Lösungen ? Gibt es sogar stets primitive Lösungen ? Ich weiss es nicht, aber dieses Problem lädt zur Vertiefung ein !»

$$p = \mathbf{26}: a = 60, b = 221, c = 229 \quad ; \quad a = 53, b = 1'404, c = 1'405$$

<https://oeis.org/A078644>

<https://oeis.org/A068068>